# Kapitel 4

# Theorie linearer partieller Differentialgleichungen

Wir werden hier lineare partielle Differentialgleichungen aus funktionalanalytischer Sicht betrachten, d.h. als Operatorgleichungen

$$Au = b$$

wobei

$$A : X \to Y$$

ein Differentialoperator ist, der die Differentialgleichung modelliert und $X, Y$ geeignete Funktionenräume. Der Vorteil dieses Zugangs ist die elegante Anwendbarkeit verschiedener Mittel der Funktionalanalysis zum Existenz- Eindeutigkeits- und Stabilitätsnachweis. Wesentliche Voraussetzung dafür ist die richtige Wahl des abstrakten Operators $A$ und der Funktionenräume $X, Y$. Hier spielen der Begriff der schwachen Ableitung und Sobolevräume eine wichtige Rolle.

## 4.1 Sobolevräume

### 4.1.1 Hölderräume

Zunächst betrachten wir Funktionenräume "klassisch" differenzierbarer Funktionen und Hölderräume.

**Definition 9.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\gamma \in (0,1]$, $u : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf $U$.

- $u$ Lipschitz-stetig: $\exists C\ \forall x, y \in U \ : \quad |u(x) - u(y)| \leq C|x - y|$
- $u$ Hölder-stetig mit Exponent $\gamma$ : $\exists C\ \forall x, y \in U \ : \quad |u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma$
- $C$-Norm: $\|u\|_{C(\overline{U})} = \sup_{x \in U} |u(x)|$
- $C^k$-Norm: $\|u\|_{C^k(\overline{U})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{U})}$
- Hölder-Halbnorm: $|u|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \dfrac{|u(x) - u(y)|}{(x - y)^\gamma}$
- Hölderraum: $C^{k,\gamma}(\overline{U}) = \{u : U \to \mathbb{R} \mid \|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})} < \infty\}$

  mit $\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})} = \|u\|_{C^k(\overline{U})} + \sum_{|\alpha| = k} |D^\alpha u|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}$

Hölderräume $C^{k,\gamma}(\overline{U})$ sind also Räume von $k$ mal stetig differenzierbaren Funktionen, deren $k$-te Ableitungen Hölder-stetig mit Exponent $\gamma$ sind. Hölderräume sind Banachräume, d.h. vollständig in dem Sinn, dass jede Cauchyfolge (bezüglich der Höldernorm $|\cdot|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})}$) einen Grenzwert in $C^{k,\gamma}(\overline{U})$ besitzt.

### 4.1.2 Definition der Sobolevräume

#### Schwache Ableitungen

Zunächst motivieren wir den Begriff der schwachen Ableitung. Bezeichne dazu

$$C_c^\infty(U) = \{\phi \in C^\infty(\overline{U}) \mid \text{supp}\phi \text{ kompakt } \subseteq U\}$$

den Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf $U$ mit kompaktem Träger $\text{supp}\phi := \{x \in U \mid \phi(x) \neq 0\}$. Wir werden im folgenden solche Funktionen $\phi$ oft als sogenannte "Testfunktionen" verwenden (vgl. Theorie der Distributionen).

Nun gilt für jede Funktion $u \in C^1(U)$ und beliebiges $i \in \{1, \ldots, m\}$ mit partieller Integration

$$\int_U u\ \phi_{x_i}\ dx = -\int u_{x_i}\ \phi\ dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U)\ ;$$

die Randintegrale verschwinden hier, weil $\phi$ kompakten Träger in $U$ hat und damit in einer Umgebung des Randes gleich Null ist. Allgemeiner gilt für $u \in C^k(U)$ und einen beliebigen

Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ der Ordnung $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m = k$, dass

$$\int_U u \; D^\alpha \phi \; dx = (-1)^\alpha \int D^\alpha u \; \phi \; dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U) \; . \tag{4.1}$$

Man beachte, dass die linke Seite in (4.1) auch dann wohldefiniert ist, wenn $u$ nicht aus $C^k(U)$ sondern nur integrierbar ist; $D^\alpha u$ auf der rechten Seite existiert dann aber offenbar nicht mehr im klassischen Sinn — wohl aber kann eine integrierbare Funktion $v$ existieren, sodass (4.1) mit $D^\alpha u$ ersetzt durch $v$ gilt; der Grad der Glattheit von $u$ ist dann "zwischen integrierbar und $C^k$".

Wir definieren nun die schwache $\alpha$-te partielle Ableitung von $u$ als eben eine solche Funktion $v$:

**Definition 10.** (Schwache Ableitung) Sei $u : U \to \mathbb{R}$ integrierbar, $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ ein Multiindex, und es existiere ein $v : U \to \mathbb{R}$ integrierbar so dass

$$\int_U u \; D^\alpha \phi \; dx = (-1)^\alpha \int v \; \phi \; dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U) \; . \tag{4.2}$$

Dann bezeichen wir $v$ als die schwache $\alpha$-te partielle Ableitung von $u$

$$D^\alpha u = v$$

Wir verwenden hier die gleiche Notation $D^\alpha$ für schwache und starke Ableitungen, was aber nicht zu Missverständnissen führen sollte, da aus dem Zusammenhang immer klar sein sollte, welche von beiden gerade gemeint ist.

Die schwache Ableitung ist tatsächlich wohldefiniert:

**Lemma 4.** *(Eindeutigkeit der schwachen Ableitung)*
*Die schwache $\alpha$-te partielle Ableitung von $u$ ist, sofern sie existiert, eindeutig bestimmt auf $U$ bis auf eine Menge vom Maß Null.*

*Beweis.* Angenommen, es gäbe zwei Funktionen $v, \tilde{v}$ für die (4.2) gilt, dann folgt für deren Differenz

$$\int_U (v - \tilde{v})\phi \; dx = 0 \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U) \; ,$$

woraus, weil der Raum der Testfunktionen dicht in $L^2(U)$ liegt,

$$v - \tilde{v} = 0 \text{ f.ü. (fast überall) in } U$$

folgt.

◇

**Sobolevräume**

Mit diesem schwachen Ableitungsbegriff und mithilfe von $L^p$-Räumen können wir nun geeignete Funktionenräume definieren:

**Definition 11.** Sei $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$. Der Sobolevraum

$$W^{k,p}(U)$$

ist der Raum jener integrierbaren Funktionen $u : U \to R$, sodass für alle Multiindizes $\alpha$ mit $|\alpha| \leq k$, die Ableitung $D^\alpha$ im schwachen Sinne existiert und in $L^p(U)$ liegt. Dabei werden Funktionen, die f.ü. gleich sind miteinander identifiziert.

Eine Norm auf $W^{k,p}(U)$ ist definiert durch

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_U |D^\alpha u| & p = \infty \end{cases} \quad , \quad u \in W^{k,p}(U) \ .$$

Für eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq W^{k,p}(U)$ schreiben wir

$$u_n \overset{n\to\infty}{\to} u \text{ in } W^{k,p}_{loc}(U)$$

genau dann wenn für alle offenen $V \subset \overline{V} \subset U$

$$u_n \overset{n\to\infty}{\to} u \text{ in } W^{k,p}(V) \ .$$

(Für jede offene Teilmenge $V$ von $U$ ist klarererweise $u \in W^{k,p}(V)$, wenn $u \in W^{k,p}(U)$.)

Mit

$$W^{k,p}_0(U)$$

bezeichnet man den Abschluss von $C^\infty_c(U)$ in $W^{k,p}(U)$.

Bei über dem ganzen $m$-dimensionalen Raum definierten Sobolevräumen, also wenn $u = \mathbb{R}^m$, gilt

$$W^{k,p}_0(\mathbb{R}^m) = W^{k,p}(\mathbb{R}^m) \ .$$

Wie wir später sehen werden, ist $W^{k,p}_0(U)$ jener Teilraum von $W^{k,p}(U)$, der die Funktionen mit verschwindenden Randwerten und verschwindenden Ableitungswerten bis zur Ordnung $k-1$ am Rand enthält.

Im Fall $p = 2$ besitzt $W^{k,p}(U)$ ein inneres Produkt

$$\langle u, v \rangle_{W^{k,p}(U)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_U D^\alpha u \; D^\alpha v \, dx$$

und wird oft als

$$H^k(U) := W^{k,2}(U)$$

bezeichnet, ebenso schreibt man oft

$$H_0^k(U) := W_0^{k,2}(U) \ .$$

Dass $\| \cdot \|_{W^{k,p}(U)}$ tatsächlich eine Norm ist, sieht man, mithilfe der Normeigenschaften der $L^p$ Räume, folgendermaßen: Definitheit

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u = 0$$

und Homogenität

$$\|\lambda u\|_{W^{k,p}(U)} = |\lambda| \, \|u\|_{W^{k,p}(U)} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ u \in W^{k,p}(U)$$

sind unmittelbar klar; um die Dreiecksungleichung zu zeigen verwenden wir die Dreiecksungleichung in $L^p$ (Minkowskiungleichung) und jene in $l^p$ und erhalten für $u, v \in W^{k,p}(U)$:

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_{W^{k,p}(U)} &= \left( \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{L^p(U)} \right)^{1/p} \\
&\le \left( \sum_{|\alpha| \le k} \left( \|D^\alpha u\|_{L^p(U)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(U)} \right)^p \right)^{1/p} \\
&\le \left( \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(U)} \right)^{1/p} + \left( \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(U)} \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

Darüberhinaus gelten folgende relativ elementare Eigenschaften für schwache Ableitungen von $W^{k,p}(U)$ -Funktionen:

**Lemma 5.** *Seien $u \in W^{k,p}(U)$, $|\alpha| \le k$, $\psi \in C_c^\infty(U)$. Dann gilt:*

*(i)* $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$
*und für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^m$ mit $|\alpha + \beta| \le k$ gilt:*
$D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta} u = D^\alpha(D^\beta u)$.

*(ii)* $\psi u \in W^{k,p}(U)$ *und*

$$D^\alpha(\psi u) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \psi D^{\alpha-\beta} u \tag{4.3}$$

*wobei* $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = \frac{\alpha_1! \cdots \alpha_m!}{\beta_1! \cdots \beta_m! (\alpha_1 - \beta_1)! \cdots (\alpha_m - \beta_m)!}$.

(Für (ii) genügt eigentlich schon $\psi \in C^k(U)$ und sogar noch etwas weniger; man beachte aber, dass im allgemeinen das Produkt von zwei $W^{k,p}(U)$-Funktionen nicht in $W^{k,p}(U)$ ist — zur Information für Interessierte: Unter der Bedingung $kp > m$ lässt sich jedoch eben mithilfe dieser Leibnitzformel und Einbettungssätzen (s.u.) zeigen dass $u, v \in W^{k,p}(U) \Rightarrow uv \in W^{k,p}(U)$, oder in anderen Worten, dass $W^{k,p}(U)$ mit der Multiplikation von Funktionen eine Banachalgebra ist.)

*Beweis.* Um (i) zu zeigen, fixieren wir ein beliebiges $\phi \in C_c^\infty$ und stellen aufgrund der Tatsache dass auch $D^\beta\phi \in C_c^\infty$ und der Definition der schwachen Ableitung (was wir hier machen, ist nicht partielle Integration im klassischen Sinn!) fest, dass

$$\begin{aligned}\int_U D^\alpha u D^\beta \phi \, dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_U u \underbrace{D^\alpha D^\beta \phi}_{=D^{\alpha+\beta}\phi} \, dx \\ &= \underbrace{(-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha+\beta|}}_{=(-1)^\beta} \int_U D^{\alpha+\beta} u \; \phi \, dx\end{aligned}$$

Die Leibnitzformel (ii) lässt sich mit Induktion zeigen: Als Induktionsanfang betrachten wir den Fall $|\alpha| = 1$. Hier gilt für beliebiges $\phi \in C_c^\infty(U)$ wegen $D^\alpha(\psi\phi) = \phi D^\alpha \psi + \psi D^\alpha \phi$

$$\int_U \psi u D^\alpha \phi \, dx = \int_U (u D^\alpha(\psi\phi) - u\phi D^\alpha \psi) \, dx = -\int_U (\psi D^\alpha u + u D^\alpha \psi)\phi \, dx$$

wobei wir in der letzten Gleichheit die Definition der schwachen Ableitung $D^\alpha u$ und die Tatsache, dass $\psi\phi \in C_c^\infty(U)$, eingesetzt haben. Wegen Lemma 4 folgt daraus, dass $D^\alpha(\psi u) = \psi D^\alpha u + u D^\alpha \psi$ sein muss. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass für alle $|\alpha| \leq k$ und alle Funktionen $\psi \in C_c^\infty$ (4.3) gilt und fixieren $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ mit $|\alpha| = k+1$. Dann gibt es ein $\beta \in \mathbb{N}_0^m$ mit $|\beta| = k$ und ein $\gamma \in \mathbb{N}_0^m$ mit $|\gamma| = 1$, sodass $\alpha = \beta + \gamma$ und damit für alle $\phi \in C_c^\infty(U)$

$$\begin{aligned}\int_U \psi u D^\alpha \phi \, dx &= \int_U \psi u D^\beta(D^\gamma \phi) \, dx = \int_U D^\beta(\psi u) D^\gamma \phi \, dx \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_U \left(\sum_{\sigma\leq\beta} \tbinom{\beta}{\sigma} D^\sigma \psi D^{\beta-\sigma} u\right) D^\gamma \phi \, dx \\ &= (-1)^{|\beta+\gamma|} \int_U \sum_{\sigma\leq\beta} \tbinom{\beta}{\sigma} D^\gamma(D^\sigma \psi D^{\beta-\sigma} u) \; \phi \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_U \sum_{\sigma\leq\beta} \tbinom{\beta}{\sigma} \left(D^{\sigma+\gamma}\psi D^{\beta-\sigma} u + D^\sigma \psi D^{\beta+\gamma-\sigma} u\right) \; \phi \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_U \sum_{\sigma\leq\alpha} \tbinom{\alpha}{\sigma} \left(D^\sigma \psi D^{\alpha-\sigma} u\right) \; \phi \, dx \; ,\end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten und vierten Zeile die Induktionsvoraussetzung (einmal für $D^\beta$ und einmal für $D^\gamma$), in der ersten und dritten Zeile die Definition der schwachen Ableitung und in der fünften Zeile die Identität

$$\binom{\beta}{\sigma-\gamma} + \binom{\beta}{\sigma} = \binom{\beta+\gamma}{\sigma} = \binom{\alpha}{\sigma}$$

für die Binomialkoeffizienten verwendet haben.

$\diamond$

Ein wichtiger Punkt ist, dass die $W^{k,p}(U)$-Räume ebenso wie die Hölderräume vollständig sind:

**Lemma 6.** *Für jedes $k \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ ist $W^{k,p}(U)$ ein Banachraum.*

*Beweis.* Angenommen, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in $W^{k,p}(U)$; dann ist aufgrund der Definition der $W^{k,p}(U)$-Norm für alle $|\alpha| \leq k$ die Funktionenfolge $(D^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $L^p(U)$ und besitzt daher wegen der Vollständigkeit von $L^p(U)$ einen Grenzwert in $L^p(U)$, den wir mit $u_\alpha \in L^p(U)$ bezeichnen. Insbesondere gilt

$$u_n \overset{n\to\infty}{\to} u_{(0,\dots,0)} =: u \text{ in } L^p(U) \ .$$

Wir zeigen nun, dass

$$u \in W^{k,p}(U), \text{ und } \quad D^\alpha u = u_\alpha \quad \forall |\alpha| \leq k$$

Dies folgt aus der Tatsache, dass für alle $\phi \in C_c^\infty$

$$\int_U u D^\alpha \phi \ dx = \lim_{n\to\infty} \int_U u_n D^\alpha \phi \ dx = \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u_n \ \phi \ dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U u_\alpha \ \phi \ dx \ .$$

Da damit also für alle $|\alpha| \leq k$

$$D^\alpha u_n \overset{n\to\infty}{\to} D^\alpha u \text{ in } L^p(U) \ ,$$

gilt also

$$u_n \overset{n\to\infty}{\to} u \text{ in } W^{k,p}(U) \ .$$

◇

**Approximation durch glatte Funktionen**

In den Beweisen von tieferliegenden Eigenschaften von Sobolevräume ist es eine typische Vorgangsweise, sich zunächst auf (beliebig oft) klassisch differenzierbare Funktionen zu beschränken, um die für diese gültigen Rechenregeln verwenden zu können, und dann mit einem Dichtheitsargument die so erzielten Aussagen für den gesamten Sobolevraum zu folgern. Dazu ist es vorweg notwendig nachzuweisen, dass glatte Funktionen tatsächlich dicht in $W^{k,p}(U)$ liegen, d.h., dass $W^{k,p}(U)$-Funktionen gut durch glatte Funktionen approximierbar sind.

Seien dazu $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p \leq \infty$ fixiert und bezeichne für ein (kleines) $\epsilon > 0$

$$U_\epsilon := \{x \in U \mid dist(x, \partial U) > \epsilon\} \subset \mathbb{R}^m$$

die offene Teilmenge von $U$, deren Elemente Abstand größer als $\epsilon$ vom Rand haben,

$$\eta_\epsilon(x) = \epsilon^{-m} \eta(x/\epsilon), \quad x \in \mathbb{R}^m$$

mit

$$\eta(\xi) := \begin{cases} C \exp(-\frac{1}{1-|\xi|^2}) & \text{für } |\xi| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $C$ einer Normierungskonstanten so dass $\int_{\mathbb{R}^m} \eta(\xi) \ d\xi = 1$, eine sogenannte Glättungsfunktion,

$$u^\epsilon := \eta_\epsilon * u \text{ in } U_\epsilon$$

die Faltung von $u$ mit dieser Glättungsfunktion, also $u^\epsilon(x) = \int_U \eta_\epsilon(x-y) u(y) \ dy$.

**Satz 14.** *(Lokale Approximation durch glatte Funktionen)*
*Sei $u \in W^{k,p}(U)$. Dann gilt einerseits*

$$u^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon) \quad \forall \epsilon > 0 \tag{4.4}$$

*und andererseits*

$$u^\epsilon \to u \text{ in } W^{k,p}_{loc}(U) \text{ für } \epsilon \to 0 \ . \tag{4.5}$$

*Beweis.* Die erste Aussage folgt sofort aus der Definition von $u^\epsilon$ und der Tatsache, dass $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Wir zeigen nun, dass für alle $|\alpha| \leq k$, $\epsilon > 0$

$$D^\alpha u^\epsilon = \eta_\epsilon * D^\alpha u \text{ in } U_\epsilon \ . \tag{4.6}$$

(Man beachte, dass hier wegen (4.4) $D^\alpha$ auf der linken Seite eine klassische Ableitung ist, während $D^\alpha u$ die schwache Ableitung der $W^{k,p}(\Omega)$-Funktion $u$ bezeichnet.) Für alle $x \in U_\epsilon$ gilt

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\epsilon(x) &= D^\alpha \textstyle\int_U \eta_\epsilon(x-y)u(y)\,dy = \int_U (D^\alpha \eta_\epsilon)(x-y)u(y)\,dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \textstyle\int_U (D^\alpha \eta_\epsilon(x-\cdot))(y)u(y)\,dy \\ &= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|} \textstyle\int_U \eta_\epsilon(x-y)D^\alpha u(y)\,dy = (\eta_\epsilon * D^\alpha u)(x) \end{aligned}$$

wobei wir am Anfang der letzten Zeile die Definition der schwachen Ableitung und die Tatsache verwendet haben, dass die Funktion $y \mapsto \eta_\epsilon(x-y)$ in $C_c^\infty(U)$ liegt.

Als nächstes weisen wir nach, dass für alle $v \in L^p(U)$ die geglätteten Funktionen $v^\epsilon := \eta_\epsilon * v$ für $\epsilon \to 0$ in $L^p_{loc}(U)$ gegen $v$ konvergieren. Nach dem Lebesgueschen Differentiationssatz gilt für fast alle Punkte $x \in U$, dass das Mittel über Kugeln mit Mittelpunkt $x$ mit Radius gegen Null gegen den Funktionswert in $x$ konvergiert:

$$\frac{1}{meas^m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |v(y) - v(x)|\,dy \ \to \ 0 \quad \text{für } r \to 0 \ .$$

Damit folgt für jeden solchen Punkt $x$ wegen $supp(\eta_\epsilon) \subseteq B(0,\epsilon)$ und der Normierung von $\eta$

$$\begin{aligned} |v^\epsilon(x) - v(x)| &= |\textstyle\int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y)(v(y)-v(x))\,dy| \\ &\leq \epsilon^{-m} \textstyle\int_{B(x,\epsilon)} \underbrace{|\eta(\frac{x-y}{\epsilon})|}_{\leq Ce^{-1}} |v(y)-v(x)|\,dy \ \to \ 0 \end{aligned}$$

für $\epsilon \to 0$; also konvergiert $v^\epsilon$ gegen $v$ fast überall in $U$ und damit auch in $L^p(U)$.

Die Aussage (4.5) folgt nun aus der Definition der $W^{k,p}(U)$-Norm, jener der $W^{k,p}_{loc}(U)$-Konvergenz und (4.6).

◇

Weiterführend stellen wir (ohne Beweis) fest, dass $W^{k,p}(U)$ Funktionen auch global im $W^{k,p}(U)$-Sinn durch $C^\infty(U)$-Funktionen beliebig genau approximiert werden können, und, unter entspechenden Glattheitsvoraussetzungen an den Rand, sogar durch Funktionen, die unendlich glatt auf $U$ *einschließlich* dem Rand sind:

**Satz 15.** *Sei $U$ beschränkt und $u \in W^{k,p}(U)$. Dann existiert eine Funktionenfolge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(U) \text{ und } u_n \overset{n\to\infty}{\to} u \text{ in } W^{k,p}(U) \ .$$

*Wenn zusätzlich $\partial U \in C^1$, dann existiert eine Funktionenfolge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\overline{U}) \text{ und } u_n \overset{n\to\infty}{\to} u \text{ in } W^{k,p}(U) \ .$$

Aufgrund der in diesem Satz getroffene Voraussetzung, dass $U$ beschränkt ist, gelten die Aussagen zunächst nicht für $W^{k,p}(\mathbb{R}^m)$; man beachte aber, dass, wie wir bereits oben angemerkt haben, $W^{k,p}(\mathbb{R}^m)$ identisch ist mit $W_0^{k,p}(\mathbb{R}^m)$, in welchem aber schon aufgrund seiner Definition die $C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$-Funktionen dicht liegen.

### Sobolevräume über $\mathbb{R}^m$ und die Fouriertransformation

Wir zeigen nun eine interessante alternative Charakterisierung von Sobolevräumen über die Fouriertransformation. Dazu beschränken wir uns zunächst auf den Fall $p = 2$, da wir hier den Satz von Plancherel zur Verfügung haben:

**Satz 16.** *Eine Funktion $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$ ist genau dann in $H^k(\mathbb{R}^m)$, wenn die Funktion $y \mapsto (1 + |y|^2)^{k/2}\hat{u}(y)$ in $L^2(\mathbb{R}^m)$ ist. Es gibt Konstanten $c, C > 0$ sodass*

$$c\|u\|^2_{H^k(\mathbb{R}^m)} \leq \int_{\mathbb{R}^m} (1 + |y|^2)^k |\hat{u}(y)|^2 \, dy \leq C\|u\|^2_{H^k(\mathbb{R}^m)} \quad \forall u \in H^k(\mathbb{R}^m) \tag{4.7}$$

Der Ausdruck in der Mitte von (4.7) definiert also eine zu $\|\cdot\|_{H^k(\mathbb{R}^m)}$ äquivalente Norm; man könnte also, alternativ zu oben, $H^k(\mathbb{R}^m)$ als den Raum jener $L^2(\mathbb{R}^m)$-Funktionen definieren, für die dieser Ausdruck endlich ist.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass auch (vgl. Satz 9) für die schwache Ableitung $D^\alpha$ einer Funktion $v \in L^2(\mathbb{R}^m)$, sofern sie existiert, gilt

$$\widehat{D^\alpha v}(y) = (iy)^\alpha \hat{v}(y) \quad y \in \mathbb{R}^m \tag{4.8}$$

für alle Multiindizes $\alpha$ so dass $D^\alpha v \in L^2(\mathbb{R}^n)$: Für jedes $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ gilt mit Satz 9

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\mathbb{R}^m} (D^\alpha\phi)(x)\, u(x)\, dx &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^m} \widehat{D^\alpha\phi}(y)\overline{\hat{u}(y)}\, dy = \int_{\mathbb{R}^m} (iy)^\alpha \hat{\phi}(y)\overline{\hat{u}(y)}\, dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \textstyle\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{F}^{-1}\left((i\cdot)^\alpha \hat{u}\right)(x)\phi(x)\, dx \ , \end{aligned}$$

woraus aufgrund der Definition der schwachen Ableitung (4.8) folgt.

Wir nehmen nun an, dass $u \in H^k(U)$ und zeigen dass dann $y \mapsto (1 + |y|^2)^{k/2}\hat{u}(y)$ in $L^2(\mathbb{R}^m)$ ist und für eine Konstante $C > 0$ die rechte Ungleichung in (4.7) gilt. Wegen (4.8) und dem Satz von Plancherel ist für alle $|\alpha| \leq k$ die Funktion $y \mapsto (iy)^\alpha\hat{u}(y)$ in $L^2(\mathbb{R}^m)$; wählt man speziell $\alpha = ke_j$, $j = 1, \ldots, m$, so erhält man

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\mathbb{R}^m} (1 + |y|^2)^k |\hat{u}(y)|^2\, dy &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^m} \left(1 + \sum_{j=1}^m y_j^2\right)^k |\hat{u}(y)|^2\, dy \\ &\leq C \textstyle\int_{\mathbb{R}^m} (1 + \sum_{j=1}^m y_j^{2k})|\hat{u}(y)|^2\, dy \\ &= C \textstyle\int_{\mathbb{R}^m} (|\hat{u}(y)|^2 + \sum_{j=1}^m |\widehat{D^{ke_j}u}(y)|^2)\, dy \leq C\|u\|^2_{H^k(\mathbb{R}^m)} \end{aligned} \ .$$

Ist umgekehrt $y \mapsto (1+|y|^2)^{k/2}\hat{u}(y)$ in $L^2(\mathbb{R}^m)$, dann gilt für beliebiges $|\alpha| \leq k$

$$\|D^\alpha u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m)} = \|\widehat{D^\alpha u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m)} = \int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{|iy^\alpha|^2}_{=\Pi_{j=1}^m |y_j|^{2\alpha_j} \leq |y|^{2|\alpha|}} |\hat{u}(y)|^2 \, dy \leq \int_{\mathbb{R}^m} (1+|y|^2)^k |\hat{u}(y)|^2 \, dy \,.$$

$\diamond$

Auch für allgemeine $W^{k,p}(\mathbb{R}^m)$ Räume über $\mathbb{R}^m$ mit $1 < p < \infty$ gilt eine ähnliche Aussage, nämlich: Eine Funktion $u \in L^p(\mathbb{R}^m)$ ist genau dann in $W^{k,p}(\mathbb{R}^m)$, wenn die invers Fouriertransformierte der Funktion $y \mapsto (1+|y|^2)^{k/2}\hat{u}(y)$ in $L^p(\mathbb{R}^m)$ ist. Es gibt Konstanten $c, C > 0$ sodass

$$c\|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^m)} \leq \|\mathcal{F}^{-1}\left((1+|\cdot|^2)^{k/2}\hat{u}\right)\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^m)} \quad \forall u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^m)$$

**Fortsetzung von $U$ auf $\mathbb{R}^m$**

Man kann nun auch alternativ Sobolevraume $W^{k,p}(U)$ über die Fouriertransformation und Einschränkung von $\mathbb{R}^m$ auf $U$ definieren. Damit diese Definition (insbesondere für Sobolevräume mit nichtganzzahligen Indizes – siehe unten) jedoch äquivalent zu der hier verwendeten ist, ist es wesentlich, sicherzustellen, dass $W^{1,p}(U)$-Funktionen zu $W^{1,p}(\mathbb{R}^m)$-Funktionen fortgesetzt werden können (einfach außerhalb von $U$ durch Null fortzusetzen könnte schiefgehen, da dadurch Unglattheit über den Rand von $U$ hinweg entstehen kann!)

Um die Existenz eines stetigen Fortsetzungsoperators zu zeigen, braucht man meist irgend eine Art von Glattheitsvoraussetzung an den Rand von $U$, wie zum Beispiel in folgender Aussage:

**Satz 17.** *Sei $1 \leq p \leq \infty$, $U$ beschränkt und $\partial U \in C^1$ und $V$ eine beliebige offene Obermenge von $U$, in der der Abschluss von $U$ enthalten ist, $U \subset \overline{U} \subset V$. Dann existiert ein beschränkter linearer Operator*

$$E : W^{1,p}(U) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^m)$$

*sodass für alle $u \in W^{1,p}(U)$*

$$Eu = u \text{ f.ü. in } U$$
$$\mathrm{supp}(E) \subseteq V$$
$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^m)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$$

*mit einer Konstanten $C$, die nur von $p$, $U$ und $V$, nicht aber von $u$ abhängt.*

Wir setzen (um die im folgenden Definitionen, insbesondere von Sobolevräumen mit nichtganzzahligen Indizes, einfach zu halten und trotzdem konsistent mit den in der Literatur verwendeten Begriffen zu bleiben) von nun an voraus, dass ein solcher Fortsetzungsoperator $E$ existiert.

**Sobolevräume mit nicht-ganzzahlingen Indizes: die Sobolev-Slobodeckij Räume**

Wir können nun $W^{s,p}$-Räume auch für $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ einführen:

**Definition 12.** Sei für $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $s \in \mathbb{R}$, mit $k := [s] \in \mathbb{N}$, $\sigma := s - [s] \in [0,1)$, also $s = k + \sigma$,

$$W^{s,p}(U) = \{u \in W^{k,p}(U) \mid |u|_{W^{\sigma,p}(U)} < \infty\} \ ,$$

mit der Halbnorm

$$|u|_{W^{\sigma,p}(U)} := \left( \sum_{|\alpha|=k} \int_U \int_U \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{m+\sigma p}} \ dx \ dy \right)^{1/p} .$$

Eine Norm auf $W^{s,p}(U)$ wird durch

$$\|u\|_{W^{s,p}(U)} := \left( \|u\|^p_{W^{k,p}(U)} + |u|_{W^{\sigma,p}(U)} \right)^{1/p}$$

definiert und

$$W_0^{s,p}(U)$$

ist der Abschluss von $C_c^\infty(U)$ in $W^{s,p}(U)$.

Die so definierten Funktionenräume sind wieder Banachräume und im Fall $p = 2$ Hilberträume, die wir dann mit

$$H^s(U) := W^{s,2}(U) \ , \quad H_0^s(U) := W_0^{s,2}(U)$$

bezeichnen. Sie lassen sich auch alternativ über Interpolation zwischen den Räumen $W^{k,p}(U)$ und $W^{k+1,p}(U)$ definieren. Für Sobolevräume über ganz $\mathbb{R}^m$ mit $1 < p < \infty$ gilt ähnlich zum ganzzahligen Fall die Beziehung

$$c\|u\|_{W^{s-\epsilon,p}(\mathbb{R}^m)} \leq \|\mathcal{F}^{-1}\left((1+|\cdot|^2)^{s/2}\hat{u}\right)\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \leq C\|u\|_{W^{s+\epsilon,p}(\mathbb{R}^m)} \quad \forall u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^m)$$

für alle $\epsilon > 0$, (wobei hier $c, C$ von $\epsilon$ abhängen), im Fall $p = 2$ sogar

$$c\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^m)} \leq \|(1+|\cdot|^2)^{s/2}\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq C\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^m)} \quad \forall u \in H^s(\mathbb{R}^m) \ . \tag{4.9}$$

**Sobolevräume mit negativen Indizes**

Mittels Dualität definieren wir für $s > 0$

$$H^{-s}(U) = (H_0^s(U))^*$$

bzw. allgemeiner für $p \in (1,\infty)$ mit $q$ so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$W^{-s,p}(U) = (W_0^{s,q}(U))^* \ ,$$

(man beachte, dass $L^p(U) = (L^q(U))^*$)) mit der Norm

$$\|u\|_{W^{-s,p}(U)} := \sup_{\substack{v \in W_0^{s,q}(U) \\ v \neq 0}} \frac{\int_U u(x)v(x) \ dx}{\|v\|_{W^{s,q}(U)}} \ ;$$

auch diese Funktionenräume sind Banachräume.

**Sobolevräume über Mannigfaltigkeiten**

Ohne in die Details zu gehen, stellen wir fest, dass man Sobolevräume auch über $(m-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten, also insbesondere auch über den Rand von $U$ definieren kann:

$$W^{s,p}(\partial U) \ , \quad H^s(\partial U) \ ;$$

(man beachte, dass für $C^1$-Ränder immer $W_0^{s,p}(\partial U) = W^{s,p}(\partial U)$ gilt). Dazu betrachtet man lokale Abflachung des Randes mittels glatter Koordinatentransformationen $\mathbf{\Phi}$ (vgl. Abschnitt 3.3.2), sodass also der Rand als Teilmenge des $\mathbb{R}^{m-1}$ interpretiert und die entsprechende Sobolevräume analog zu oben, mit $m$ ersetzt durch $m-1$, definiert werden können.

### 4.1.3 Spursätze

Um im Rahmen von Sobolevraumtheorie Randwertprobleme für PDGln betrachten zu können, ist es wesentlich, sich mit der Frage zu beschäftigen, was Randwerte einer $W^{s,p}(U)$-Funktion eigentlich bedeuten. Wir führen dazu den sogenannten Spuroperator ein:

**Definition 13.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ein $C^k$-glattes beschränktes Gebiet und sei die lineare Abbildung $T_k$ durch

$$u \mapsto T_k u := \left( u|_{\partial U}, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial U}, \ldots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \mathbf{n}^{k-1}}|_{\partial U} \right) \quad \forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$$

gegeben.

Dieser Spuroperator läßt sich nun nicht nur für "klassisch" glatte Funktionen definieren, sondern auf ganz $W^{k,p}(U)$ erweitern:

**Satz 18.** *(Spursatz)*
*Unter den in Definition 13 gemachten Voraussetzungen an $U$ lässt sich der dort definierte Spuroperator $T_k$ in eindeutiger Weise stetig auf ganz $W^{k,p}(U)$ mit $1 < p < \infty$ erweitern und ist dann ein stetiger linearer Operator*

$$T_k : W^{k,p}(U) \to \Pi_{l=0}^{k-1} W^{k-l-1/p,p}(\partial U)$$

*Dieser Operator besitzt eine stetige Rechtsinverse, es existiert also ein Fortsetzungsoperator*

$$Z_k : \Pi_{l=0}^{k-1} W^{k-l-1/p,p}(\partial U) \to W^{k,p}(U)$$

*mit*

$$T_k \circ Z_k = Id_{\Pi_{l=0}^{k-1} W^{k-l-1/p,p}(\partial U)} \ .$$

Insbesondere gilt im Fall $p = 2$, dass man bei Einschränkung einer Funktion auf den Rand (d.h. $k = 1$, $T_1 u = u|_{\partial U}$) "eine halbe Differentiationsordnung verliert".

Für den Fall $p = 2$, $U = \mathbb{R}^m$ gibt es einen einfachen Beweis über Fouriertransformierte, den wir hier für den Fall $k = 1$ bringen:

**Satz 19.** *Sei $s > \frac{1}{2}$, dann läßt sich der Spuroperator*

$$T : u \mapsto u\big|_{\{x\in\mathbb{R}^m \ | \ x_m=0\}} \quad \forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$$

*in eindeutiger Weise zu einem stetigen Operator*

$$T : H^s(\mathbb{R}^m) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{m-1})$$

*erweitern.*

*Beweis.* Da $C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ dicht in $H^s(\mathbb{R}^m)$ liegt, genügt es zu zeigen, dass für alle $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ die Ungleichung

$$\|T\phi\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{m-1})} \le C\,\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^m)} \tag{4.10}$$

mit einer Konstanten $C$ gilt. Sei nun also $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ beliebig aber fix, dann ist für ein $x' := (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$ gemäß der Definition des Spuroperators

$$(T\phi)(x') = \phi(x', 0) \ .$$

Wegen Satz 9 gilt zwischen der $m$-dimensionalen Fouriertransformierten $\hat{\phi}$ und der $(m-1)$-dimensionalen Fouriertransformierten $\widehat{T\phi}^{m-1}$ der Zusammenhang

$$\begin{aligned}
\widehat{T\phi}^{m-1}(\xi') &= \widehat{\phi(\cdot,0)}^{m-1}(\xi') = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i0\xi_m} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{e^{-i\xi_m x_m}\phi(\cdot, x_m)\ dx_m d\xi_m}\right)^{m-1}(\xi') \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(\xi', \xi_m)\ d\xi_m
\end{aligned}$$

Damit gilt wegen der Normäquivalenz (4.9)

$$\begin{aligned}
\|T\phi\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{m-1})} &\le C \int_{\mathbb{R}^{m-1}} (1+|\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}} |\widehat{T\phi}^{m-1}(\xi')|^2\ d\xi' \\
&= \tfrac{C}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} (1+|\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}} \underbrace{|\int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(\xi', \xi_m)\ d\xi_m|^2}_{\overset{Cauchy-Schwarz}{\le} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi}(\xi',\xi_m)|(1+|(\xi',\xi_m)|^2)^s\ d\xi_m \int_{\mathbb{R}} (1+|(\xi',\xi_m)|^2)^{-s}\ d\xi_m} d\xi' \\
&= \tfrac{C}{2} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi}(\xi', \xi_m)|(1+|(\xi', \xi_m)|^2)^s\ d\xi_m\ d\xi'
\end{aligned}$$

da

$$\int_{\mathbb{R}} (1+|(\xi', \xi_m)|^2)^{-s}\ d\xi_m = \pi(1+|\xi'|^2)^{-s+\frac{1}{2}} \ .$$

Daraus folgt, wieder mit (4.9), die Aussage (4.10).

◇

Wie bereits früher erwähnt, sind nun die $W_0^{k,p}$ gerade jene $W^{k,p}$-Funktionen, deren Spur verschwindet:

**Satz 20.** *Sei $U$ ein beschränktes $C^k$-glattes Gebiet und sei $T_k$ der Spuroperator aus Satz (18). Dann gilt*

$$\mathcal{N}(T_k) = W_0^{k,p}$$

*also insbesondere für $k = 1$*

$$W_0^{1,p} = \{u \in W^{1,p} \ | \ Tu = 0\}$$

### 4.1.4 Einbettungssätze

Um einen Zusammenhang zwischen "schwach" und "klassisch" glatten Funktionen herstellen zu können, ist folgender Einbettungssatz wesentlich. Wir schreiben hier (wie in der Literatur üblich) abkürzend

$$X \to Y$$

für den Sachverhalt

$$X \subseteq Y \text{ und die Einbettung von } X \text{ in } Y \text{ ist stetig}$$

also

$$\forall u \in X \ : \quad \|u\|_Y \leq C\,\|u\|_X$$

**Satz 21.** *(Lemma von Sobolev) Sei $U$ eine offene beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ mit $C^1$-Rand oder $U = \mathbb{R}^m$, $s > 0$, $0 \leq j \leq s$, $\gamma \in (0,1)$. Dann gilt*

$$s - \frac{m}{p} > j + \gamma \quad \Longrightarrow \quad W^{s,p}(U) \to C^{j,\gamma}(\overline{U})$$

Um Stetigkeit von $W^{s,p}$-Funktionen garantieren zu können braucht man also einen hinreichen großen Index $s$, in Abhängigkeit von $p$ und insbesondere auch von der Raumdimension $m$:

$$s > \frac{m}{p} \ .$$

*Beweis.* Wieder führen wir den Beweis der Einfachheit halber nur für den Fall $p = 2$, $U = \mathbb{R}^m$, und für $j = \gamma = 0$

Unter den Voraussetzungen von Satz 21 gilt für beliebiges aber fixes $\phi \in C_c^\infty$ und alle $x \in \mathbb{R}^m$ wegen Satz 9

$$\begin{array}{rcl} |\phi(x)| & = & \left|\frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{ix\cdot\xi}\hat{\phi}(\xi)\ d\xi\right| \\ & \leq & \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} |\hat{\phi}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{s/2}(1+|\xi|^2)^{-s/2}\ d\xi \\ & \overset{Cauchy-Schwarz}{\leq} & \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^m} |\hat{\phi}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\ d\xi}\sqrt{\int_{\mathbb{R}^m}(1+|\xi|^2)^{-s}\ d\xi} \end{array}$$

wobei das Integral $\int_{\mathbb{R}^m}(1+|\xi|^2)^{-s}\ d\xi$ wegen $s > \frac{m}{2}$ endlich ist. Ein Dichtheitsargument liefert damit die Aussage von Satz 21 mit $j = \gamma = 0$, $p = 2$ für allgemeines $u \in H^s(U)$.

$\diamond$

Der folgende Satz sagt aus, wann ein $W^{s,p}$-Raum stetig in einen anderen einbettbar ist:

**Satz 22.** *Sei $U$ eine offene beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ mit $C^1$-Rand $0 \leq \tilde{s} \leq s$, $1 \leq p, q < \infty$. Dann gilt*

$$s - \frac{m}{p} \leq \tilde{s} - \frac{m}{q} \quad \Longrightarrow \quad W^{s,p}(U) \to W^{\tilde{s},q}(U)$$

### 4.1.5 Kompakte Einbettung

Unter bestimmeten Voraussetzungen ist die Einbettung eines Sobolevraums in einen anderen sogar kompakt. Wir schreiben, wieder abkürzend

$$X \hookrightarrow Y$$

für

$$X \subseteq Y \text{ und die Einbettung von } X \text{ in } Y \text{ ist kompakt}$$

d.h.

$$\forall u \in X \ : \quad \|u\|_Y \leq C\,\|u\|_X$$

und jede beschränkte Menge in $X$ ist relativkompakt in $Y$, jede Folge in dieser beschränkten Menge besitzt also eine bezüglich der $Y$-Topologie konvergent Teilfolge.

**Satz 23.** *(Kompaktheitssatz von Rellich-Kondrachov)*
*Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ beschränkt, $s \geq 0$, $1 \leq p < \infty$ und*

$$q \begin{cases} < \frac{mp}{m-p} & \text{falls } p < m \\ < \infty & \text{falls } p = m \\ \leq \infty & \text{falls } p > m \end{cases}$$

*Dann gilt*

$$W_0^{s+1,p}(U) \hookrightarrow W_0^{s,q}(U)\ . \tag{4.11}$$

*Falls zusätzlich $\partial U \in C^1$, dann gilt außerdem*

$$W^{s+1,p}(U) \hookrightarrow W^{s,q}(U)\ .$$

Insbesondere gilt wegen $p < \frac{mp}{m-p}$ immer

$$W_0^{s+1,p}(U) \hookrightarrow W_0^{s,p}(U)( \text{ und falls } \partial U \in C^1 \ : \quad W^{s+1,p}(U) \hookrightarrow W^{s,p}(U))\ ,$$

und es gilt sogar für beliebiges $\bar{s} \in \mathbb{R}$ mit

$$\bar{s} > s$$

$$W_0^{\bar{s},p}(U) \hookrightarrow W_0^{s,p}(U)$$

und falls $\partial U \in C^1$

$$W^{\bar{s},p}(U) \hookrightarrow W^{s,p}(U)$$

*Beweis.* Wir beschränken uns hier auf jenen Teil (4.11), bei dem die Glattheit des Randes keine Rolle spielt und auf den Fall $s = 0$ (o.B.d.A., wegen (i) in Lemma 5), sowie $p < m$ und verwenden dazu

**Satz 24.** *(Kolmogoroffsches Kompaktheitskriterium)*
*Sei $1 \leq q < \infty$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Eine Teilmenge $M$ von $L^q(U)$ ist genau dann relativkompakt in $L^q(U)$, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind*

*(i) $M$ ist beschränkt in $L^q(U)$*

*(ii) $\lim_{h\to 0}\int_U |u(x+h)-u(x)|^q\ dx = 0$ gleichmäßig für alle $\phi\in M$*

*(iii) $\lim_{\alpha\uparrow\infty}\int_{\{|x|>\alpha\}\cap U}|u(x)|^q\ dx = 0$ gleichmäßig für alle $\phi\in M$*

*Falls $U$ beschränkt ist, so ist die letzte Bedingung überflüssig.*

Sei nun also $M$ eine beschränkte Teilmenge in $W_0^{1,p}(U)$

$$M\subseteq\{u\in W_0^{1,p}(U)\ |\ \|u\|_{W^{1,p}(U)}\le C_M\}$$

für ein $C_M>0$, von der wir nun zeigen müssen, dass sie relativkompakt in $L^q(U)$ ist. Der erste Punkt im Kolmogoroffschen Kompaktheitskriterium folgt sofort aus Satz 22, es bleibt also wegen der vorausgesetzten Beschränktheit von $U$ nur noch (ii) zu zeigen. Sei dazu $\phi\in C_c^\infty(U)\cap M$ beliebig aber fix. Dann gilt für alle hinreichend kleinen $h\in\mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned}\int_U|\phi(x+h)-\phi(x)|^p\ dx &= \int_U|\int_0^1\tfrac{d}{d\tau}\phi(x+\tau h)\ d\tau|^p dx\\ &= \int_U|\int_0^1 h\cdot\mathrm{grad}\phi(x+\tau h)\ d\tau|^p dx\\ &\le |h|^p\int_0^1\int_U|\mathrm{grad}\phi(x+\tau h)|^p dx\ d\tau\le C_M^p|h|^p\end{aligned}$$

und damit, falls $q<p$

$$\begin{aligned}\int_U|\phi(x+h)-\phi(x)|^q\ dx &\overset{\text{Hölderungl.}}{\le} \left(\int_U|\phi(x+h)-\phi(x)|^p\ dx\right)^{q/p}(meas^m(U))^{(p-q)/p}\\ &\le C_M^q\,(meas^m(U))^{(p-q)/p}\,|h|^q\ .\end{aligned}$$

Im (interessanteren) Fall $q\ge p$ kann man wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}&\int_U|\phi(x+h)-\phi(x)|^q\ dx\\ &\le\int_U(|\phi(x+h)|+|\phi(x)|)^{mq/p-m}|\phi(x+h)-\phi(x)|^{q+m-mq/p}\ dx\\ &\overset{\text{Hölderungl.}}{\le}\left(\int_U(|\phi(x+h)|+|\phi(x)|)^{\frac{mp}{m-p}}\ dx\right)^{(q-p)(m-p)/p^2}\left(\int_U|\phi(x+h)-\phi(x)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}(q+m-mq/p)}\\ &\overset{\text{Dreiecksungl. in } L^{mp/(m-p)}}{\le}(2\|\phi\|_{L^{mp/(m-p)}(U)})^{mq/p-m}\ C_M^{q+m-mq/p}\ |h|^{q+m-mq/p}\\ &\overset{\text{Satz 22}}{\le} C\|\phi\|_{W^{1,p}(U)}^{mq/p-m}\ C_M^{q+m-mq/p}\ |h|^{q+m-mq/p}\le CC_M^q\ |h|^{q+m-mq/p}\ .\end{aligned}$$

Da $C_c^\infty(U)$ dicht in $W_0^{1,p}$ und damit auch in $M$ liegt, gilt diese Abschätzung für alle $u\in M$:

$$\forall u\in M\ :\int_U|u(x+h)-u(x)|^q\ dx\le C\begin{cases}|h|^q & \text{falls } q<p\\ |h|^{q+m-mq/p} & \text{falls } q\ge p\end{cases}$$

für eine Konstante $C>0$, die nur von $C_M$ und $U$ abhängt. Da der Exponent bei $|h|$ aufgrund der Voraussetzung $q<\frac{mp}{m-p}$ echt größer als Null ist

$$q+m-mq/p=q(1-m(\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{q}))>q(1-m(\tfrac{1}{p}-\tfrac{m-p}{mp}))=0$$

folgt daraus, dass auch (ii) im Kolmogoroffschen Kompaktheitskriterium erfüllt und damit der Beweis abgeschlossen ist.

$\diamond$

Hier war die Voraussetzung, dass $U$ beschränkt ist, entscheidend, weil dadurch im Beweis der Punkt (iii) im Kolmogorovschen Kompaktheitskriterium weggelassen werden konnte; für unbeschränkte Gebiete kompakte Einbettung zu zeigen würde weitaus kompliziertere Voraussetzungen erfordern.

### 4.1.6 Wichtige Ungleichungen in Sobolevräumen

Oft ist es wesentlich, Normäquivalenzen herzustellen, bei denen die gesamte Sobolevnorm, bestehen aus den $L^p$-Normen *aller Ableitungen* bis zur Ordnung $k$, abgeschätzt werden kann durch die $L^p$-Normen *nur der $k$-ten Ableitungen* (plus geeignete Zusatzterme). Solche Ungleichungen benötigt man zum Beispiel für den Nachweis von Konvergenzgeschindigkeiten bei numerischen Lösungsverfahren für PDGln (Bramble-Hilbert-Lemma). Hier spielen die Ungleichungen von Poincaré und Friedrichs eine wichtige Rolle.

**Satz 25.** *(Poincaré-Ungleichung)*
*Sei $U$ beschränkt, zusammenhängend und $C^1$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$, dann gilt*

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} \le C \left( \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^p(U)} + \sum_{|\alpha|\le k-1} |\int_U D^\alpha u \; dx| \right) \quad \forall u \in W^{k,p}(U)$$

*mit einer Konstanten $C$, die nur von $k$, $m$, $p$, und $meas^m(U)$ abhängt.*

*Beweis.* Wir zeigen, dass

$$\|u - \frac{1}{meas^m(U)} \int_U u(x) \; dx\|_{L^p(U)} \le C \|\text{grad} u\|_{L^p(U)} \quad \forall u \in W^{1,p}(U) \tag{4.12}$$

daraus folgt im Fall $k = 1$ die Behauptung. Der Fall $k > 1$ lässt sich daraus mit Induktion schließen. Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiere ein $u_n \in W^{1,p}(U)$ mit

$$\|u_n - \frac{1}{meas^m(U)} \int_U u_n(x) \; dx\|_{L^p(U)} > n \|\text{grad} u_n\|_{L^p(U)} \tag{4.13}$$

Für die normierten Funktionen

$$v_n := \frac{u_n - \frac{1}{meas^m(U)} \int_U u_n(x) \; dx}{\|u_n - \frac{1}{meas^m(U)} \int_U u_n(x) \; dx\|_{L^p(U)}}$$

gilt dann

$$\frac{1}{meas^m(U)} \int_U v_n(x) \; dx = 0 \;\wedge\; \|v_n\|_{L^p(U)} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \;, \tag{4.14}$$

woraus mit (4.13) folgt

$$\|\mathrm{grad} v_n\|_{L^p(U)} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \ . \tag{4.15}$$

Insbesondere ist die Funktionenfolge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $W^{1,p}(U)$ und besitzt daher nach dem Satz von Rellich-Kondrachov eine Teilfolge $(v_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$, die in $L^p(U)$ gegen ein $v \in L^p(U)$ konvergiert. Für dieses $v$ gilt wegen (4.14)

$$\frac{1}{meas^m(U)} \int_U v(x)\ dx = 0 \ \wedge \ \|v\|_{L^p(U)} = 1 \ . \tag{4.16}$$

Andererseits ist aber wegen (4.15), für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\phi \in C_c^\infty(U)$

$$\int_U v\phi_{x_i}\ dx = \lim_{l\to\infty} \int_U v_{n_l}\phi_{x_i}\ dx = -\lim_{l\to\infty} \int_U v_{n_l\ x_i}\phi\ dx = 0 \ ,$$

und damit existiert die schwache Ableitung von $v$ und ist f.ü. gleich Null, woraus wir wegen $U$ zusammenhängend schließen können (Übung!), dass $v$ konstant ist f.ü. in $U$. Wegen der linken Gleichheit in (4.16) muss diese Konstante gleich Null sein — das ist aber ein Widerspruch zur rechten Gleichheit in (4.16).

◇

In $W_0^{k,p}$-Räumen kann man auf der rechten Seite sogar die Terme mit Ableitungen der Ordnung $\leq k-1$ ganz weglassen:

**Satz 26.** *(Friedrichs-Ungleichung)*
*Sei $U$ beschränkt, $1 \leq p \leq \infty$, dann gibt es eine Konstante $C$, die nur von $m$, $p$ und $diam(U)$ (Durchmesser von $U$) abhängt, sodass*

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} \leq C \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^p(U)} \quad \forall u \in W_0^{k,p} \ .$$

Der Ausdruck $\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^p(U)}$, der im allgemeinen nur eine Halbnorm auf $W^{k,p}(U)$ darstellt, ist also auf $W_0^{k,p}$ eine Norm.

*Beweis.* O.B.d.A. beschränken wir uns wieder auf $k = 1$, zu zeigen ist also

$$\|u\|_{L^p(U)} \leq C\,\|\mathrm{grad} u\|_{L^p(U)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(U) \ . \tag{4.17}$$

Wir zeigen (4.17) für alle $\phi \in C_c^\infty(U)$ anstatt für alle $u \in W_0^{1,p}$, und verwenden ein Dichtheitsargument, um daraus (4.17) zu schließen. Sei also $\phi \in C_c^\infty(U)$ beliebig, dann gilt, weil $U$ beschränkt ist und damit zwischen zwei Hyperebenen $\{x \mid x_m = a\}$ und $\{x \mid x_m = b\}$ mit $a < b \in \mathbb{R}$ liegt,

$$\phi(x_1, \ldots, x_m) = \int_a^{x_m} \phi_{x_m}(x_1, \ldots, x_{m-1}, \tau)\ d\tau \ ,$$

woraus im Fall $p = \infty$ unmittelbar (4.17) für alle $\phi \in C_c^\infty(U)$ folgt. Falls $1 \le p < \infty$, gilt weiter

$$
\begin{aligned}
\|\phi\|_{L^p(U)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^{m-1}} \int_a^b \left| \int_a^{x_m} \phi_{x_m}(x', \tau)\, d\tau \right|^p dx_m\, dx'\right)^{1/p} \\
&\overset{\text{Hölderungl.}}{\le} \left(\int_{\mathbb{R}^{m-1}} \int_a^b \int_a^{x_m} |\phi_{x_m}(x', \tau)|^p\, d\tau\, (x_m - a)^{p-1}\, dx_m\, dx'\right)^{1/p} \\
&\le \left(\frac{(b-a)^p}{p} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \int_a^b |\phi_{x_m}(x', \tau)|^p\, d\tau\, dx'\right)^{1/p} = \frac{(b-a)}{p^{1/p}} \|\phi_{x_m}\|_{L^p(U)} \\
&\le \frac{(b-a)}{p^{1/p}} \|\mathrm{grad}\phi\|_{L^p(U)} .
\end{aligned}
$$

◇

### 4.1.7 Räume zeitabhängiger Funktionen

Für die Behandlung parabolische PDGln brauchen wir Funktionenräume, die die besondere Rolle der Zeitvariablen berücksichtigen. Es werden dies Räume von Funktionen sein, die ein Zeitintervall $[0, T]$ in einen Banachraum (hier konkret: einen Banachraum von Funktionen der Ortsvariablen) abbilden. Maß- und Integrationstheorie für solche Banachraum-wertigen Funktionen ist analog zum reelwertigen Fall definiert (siehe z.B. [1]). Damit können wir $L^p$-Räume und schwache Ableitungen über solche Funktionen definieren:

**Definition 14.** Sei $X$ ein reeller Banachraum mit Norm $\|\cdot\|_X$, $p > 1$.

Der Raum

$$L^p(0, T; X)$$

besteht aus allen messbaren Funktionen $\mathbf{u} : [0, T] \to X$ mit $\|\mathbf{u}\|_{L^p(0,T;X)} < \infty$, wobei

$$\|\mathbf{u}\|_{L^p(0,T;X)} := \begin{cases} \left(\int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_X^p\, dt\right)^{1/p} & 1 \le p < \infty \\ \sup_{t\in[0,T]} \|\mathbf{u}(t)\|_X & p = \infty \end{cases}$$

Der Raum

$$C([0, T], X)$$

besteht aus allen stetigen Funktionen $\mathbf{u} : [0, T] \to X$ mit der Norm

$$\|\mathbf{u}\|_{C([0,T],X)} := \max_{t\in[0,T]} \|\mathbf{u}(t)\|_X .$$

Sei $\mathbf{u} \in L^1(0, T; X)$, dann bezeichnen wir $\mathbf{v} \in L^1(0, T; X)$ als die schwache Ableitung von $\mathbf{u}$

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}' ,$$

wenn

$$\int_0^T \phi'(t)\mathbf{u}(t)\, dt = -\int_0^T \phi(t)\mathbf{v}(t)\, dt \quad \forall \phi \in C_c^\infty(0, T) .$$

(die Testfunktionen $\phi$ sind reelwertig, die Werte der beiden Integrale links und rechts von = sind Elemente des Banachraums $X$!)